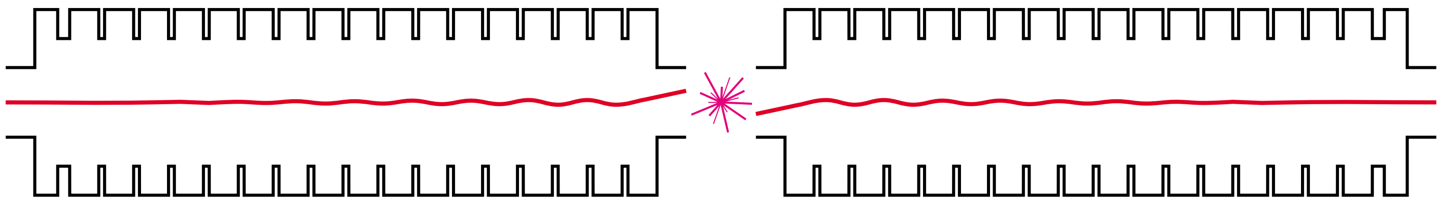
Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Lehrstuhl Theoretische Elektrotechnik

Transversale Beam-Dynamik

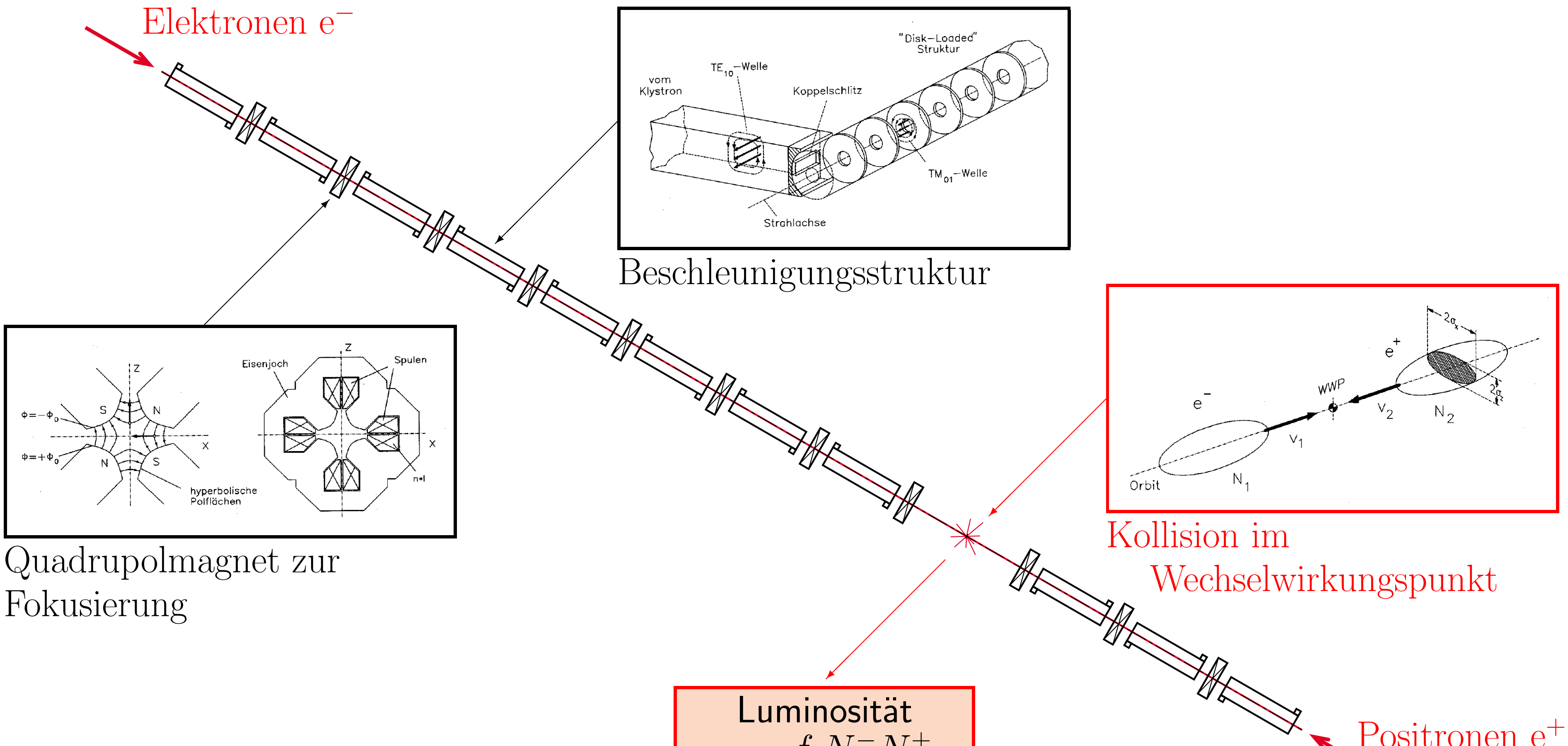
Dr.-Ing. Arnim Nethe



Übersicht

- Motivation - Was ist transversale Beam-Dynamik ?
- Dynamik einzelner Ladungspakete
  - Das Einteilchen-Modell
    - ohne Beschleunigung
    - mit Beschleunigung
    - bei Berücksichtigung transversaler Wakefelder
  - Das Zweiteilchen-Modell
  - Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung
- Dynamik mehrerer Ladungspakete
- Zusammenfassung und Ausblick

Aufbau eines Linearbeschleunigers



Luminosität

$$\mathcal{L} = \frac{f_b N^- N^+}{4\pi\sigma_x\sigma_y}$$

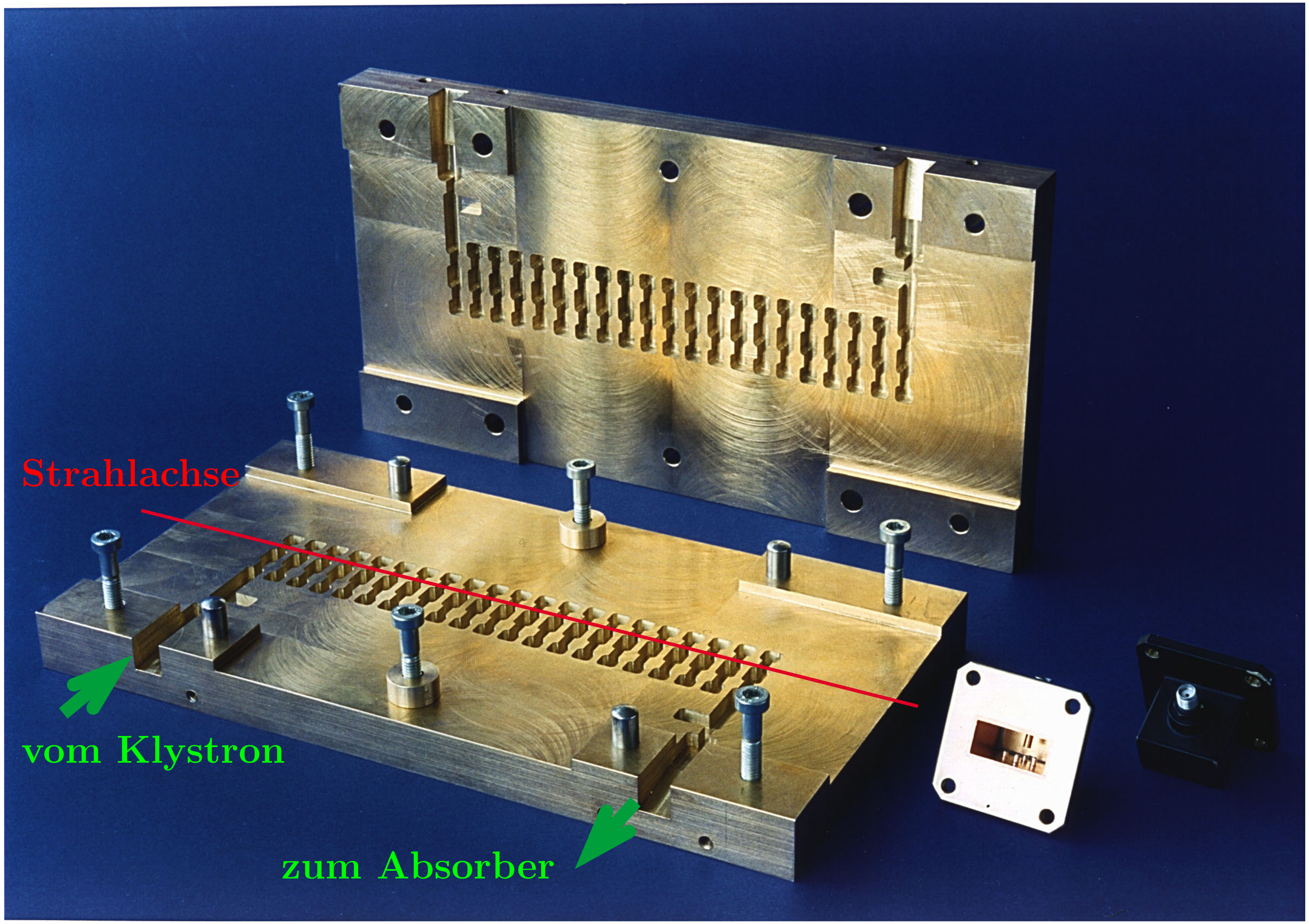
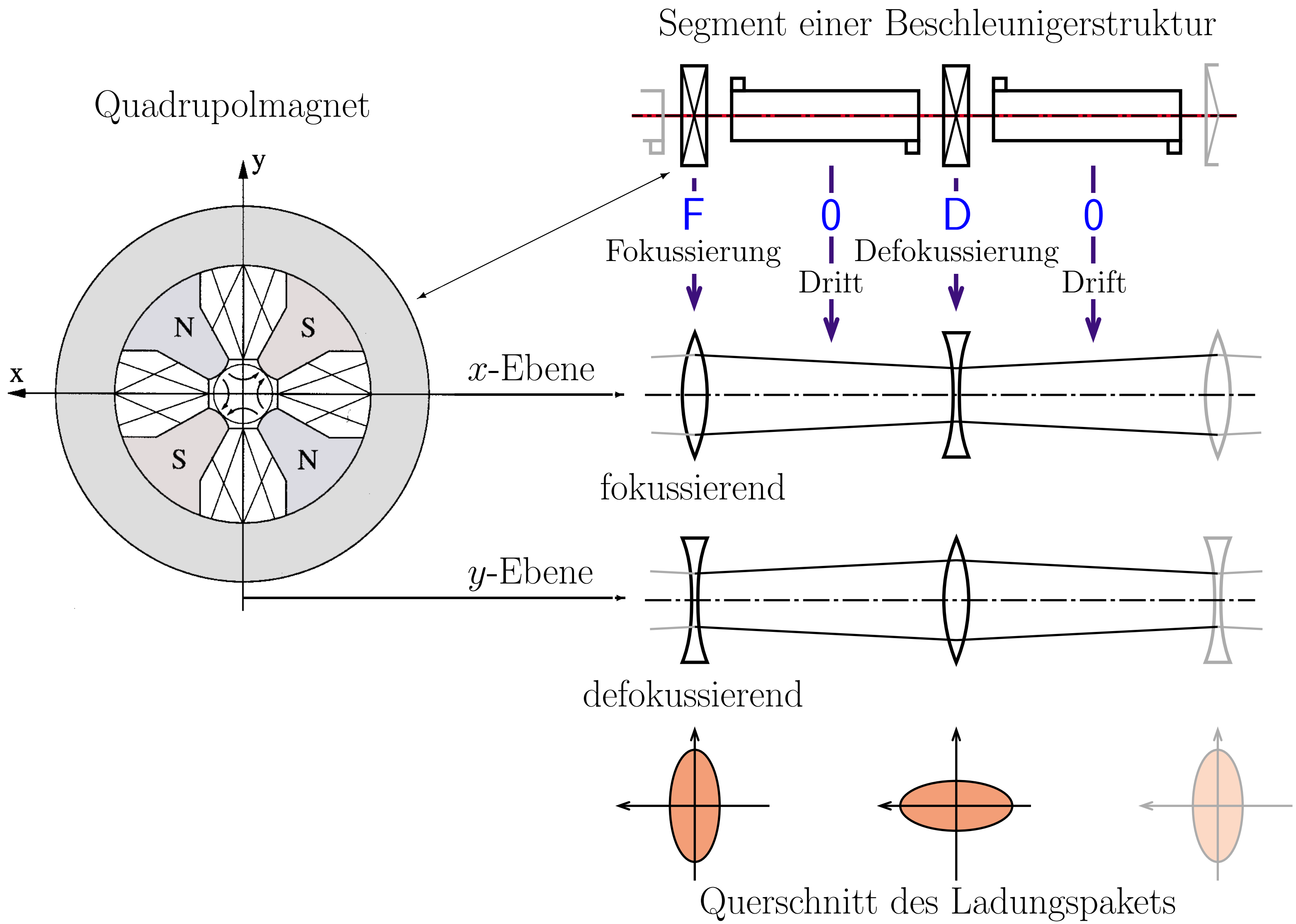


Foto: TU-Berlin

Prozeßmodell zur transversalen Beam-Dynamik

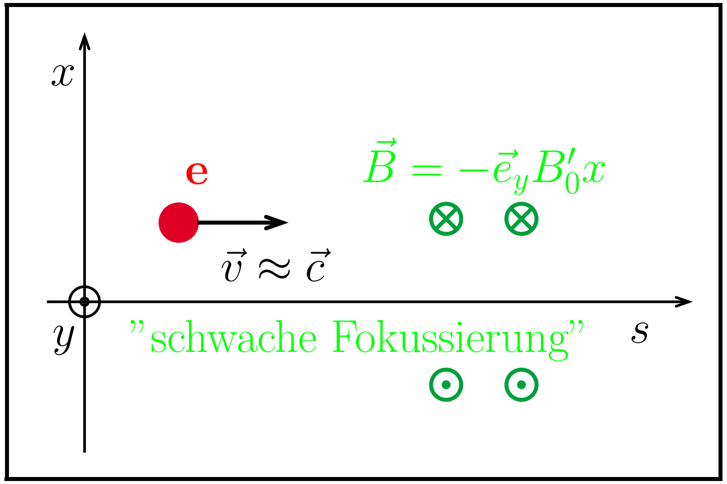


Prozeßmodell zur transversalen Beam-Dynamik

- Zusammenfassung von zwei Quadrupolmagneten und zwei Beschleunigerstrukturen zu einer FODO-Struktur:
  - über diese Struktur ist das Verhalten für die x- bzw. die y-Ebene gleich,
  - somit braucht nur eine Ebene für die transversale Bewegung betrachtet werden.
- Der Einfluß der FODO-Struktur auf die Ladungen wird gemittelt:
  - d.h. ein konstanten Beschleunigungsfeld,
  - über den gesamtem Bereich eine gleichmäßige *schwache Fokussierung*.

Dynamik einzelner Ladungspakete

Bewegungsgleichung für ein Elektron ohne Beschleunigung



Bewegungsgleichung: $\boxed{\dot{\vec{p}} = -\mathrm{e}(\vec{v} \times \vec{B})}$

$$\boxed{\dot{p}_x = \mathrm{e}\, v B_y \approx -\mathrm{e}\, c B_0' x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{m_0 \gamma \dot{x}\} = m_0 \gamma \underbrace{\ddot{x}}_{\approx c^2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2}} \quad \text{für} \quad \dot{\gamma} = 0$$

Damit ergeben sich zwei äquivalente Differentialgleichungen für die transversale Bewegung:

$$\text{im Ortsbereich } (s) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{e}\, B_0'}{m_0 \gamma c} x = 0 \qquad \longrightarrow \exp(\mathrm{j} k_\beta s)$$

$$\text{im Zeitbereich } (t) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{e}\, c B_0'}{m_0 \gamma} = 0 \qquad \longrightarrow \exp(\mathrm{j} \omega_\beta t)$$

Betatronwellenzahl $\boxed{k_\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_\beta}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}\, B_0'}{m_0 \gamma c}}$

Dynamik einzelner Ladungspakete

Bewegungsgleichung für ein Elektron mit Beschleunigung

Beschleunigungsfeld: E_0

$$\boxed{\dot{p}_s = \mathrm{e}\ E_0 = m_0\gamma\ddot{s} + m_0\dot{\gamma}\dot{s} \approx m_0\dot{\gamma}c}$$

Teilchenenergie: $E = \underbrace{E_i}_{\text{Anfangsenergie}} + \mathrm{e}\ E_0 s = \gamma m_0 c^2$

$$\gamma = \underbrace{\frac{E_i}{m_0c^2}}_{\gamma_i} + \underbrace{\frac{\mathrm{e}\ E_0}{E_i}}_{G\ :\ \text{Beschleunigungsgradient}} \frac{E_i}{m_0c^2}\ s$$

$$\gamma = \gamma_i(1 + Gs)$$

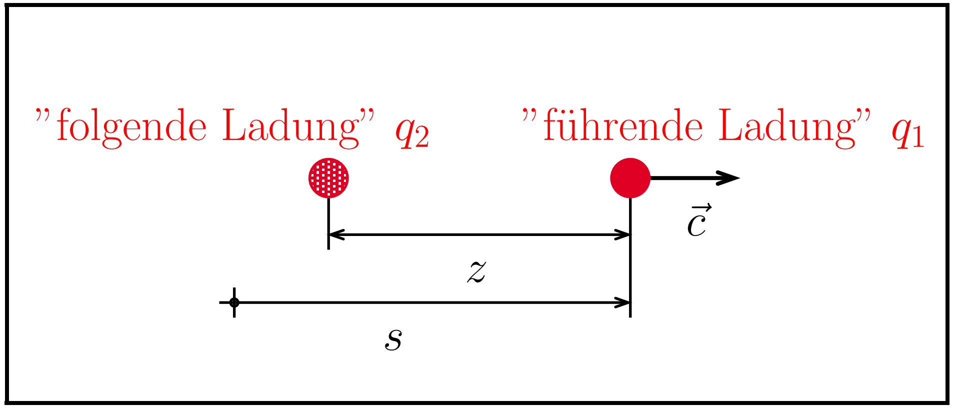
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_x = \mathrm{e}\ cB_0'x\ &= m_0\dot{\gamma}\dot{x} + m_0\gamma\ddot{x} \\ &= m_0c^2\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \gamma m_0c^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} \end{aligned}}$$

Bewegungsgleichung für die transversale Bewegung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + k_\beta^2 x = 0}$$

Dynamik einzelner Ladungspakete

Berücksichtigung transversaler Wakefelder



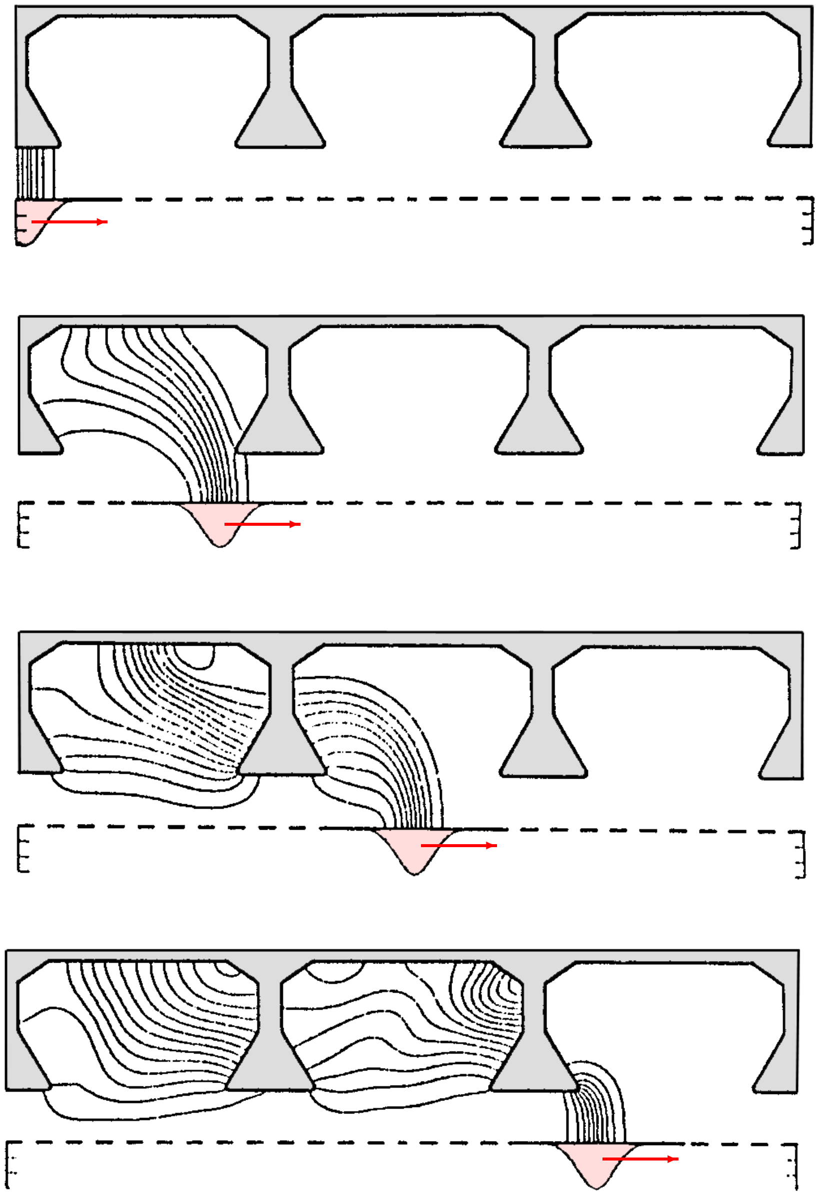
Definition des Deltafunktion-Wakepotentials

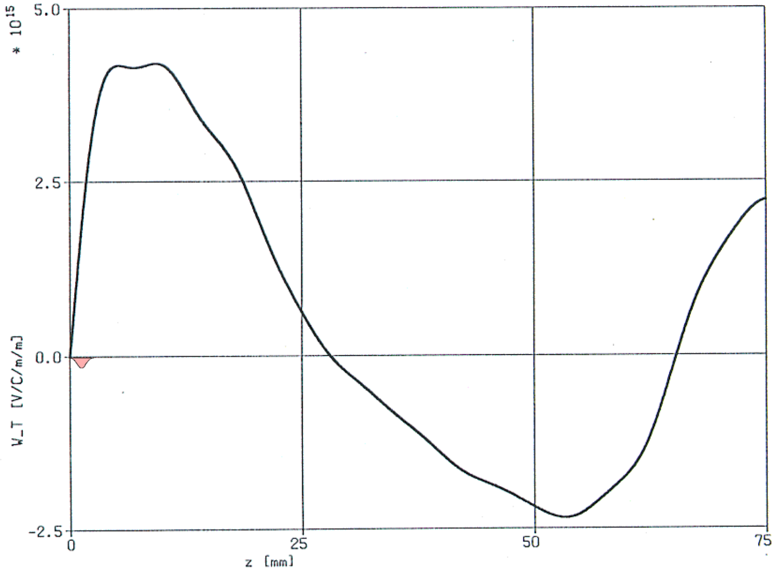
$$\boxed{\vec{W}_\perp^\delta(z) = \frac{1}{q_1}\,\frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}z\,\left\{\vec{E}_\perp + \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_\perp\right\}\bigg|_{t=\frac{z+s}{c}}}$$

Unter der Vorausetzung, daß sich der transversale Teilchenversatz genügend langsam mit s ändert, kann mit einer *mittleren Kraft* gerechnet werden:

$$\boxed{\vec{F}_\perp(z) \approx \overline{\vec{F}_\perp(z)} = q_1 q_2\,\vec{W}_\perp^\delta(z)}$$

Transversale Wakefelder

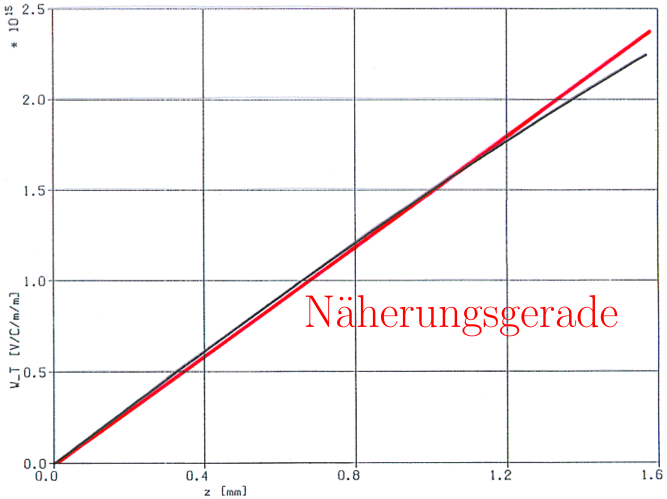




Abstand Δz hinter der Ladung

Werden nur die Felder in der Nähe des Ladungspakets berücksichtigt, gilt:

$$\vec{W}_\perp = W_x x_1 \vec{e}_x \approx \underbrace{x_1}_{\text{transversaler Versatz des erregenden Teilchens}} W_x' \,\Delta z\, \vec{e}_x$$



Teilchenabstand Δz

W_x' im Nahbereich eines Elektronenbunches

typische Werte:

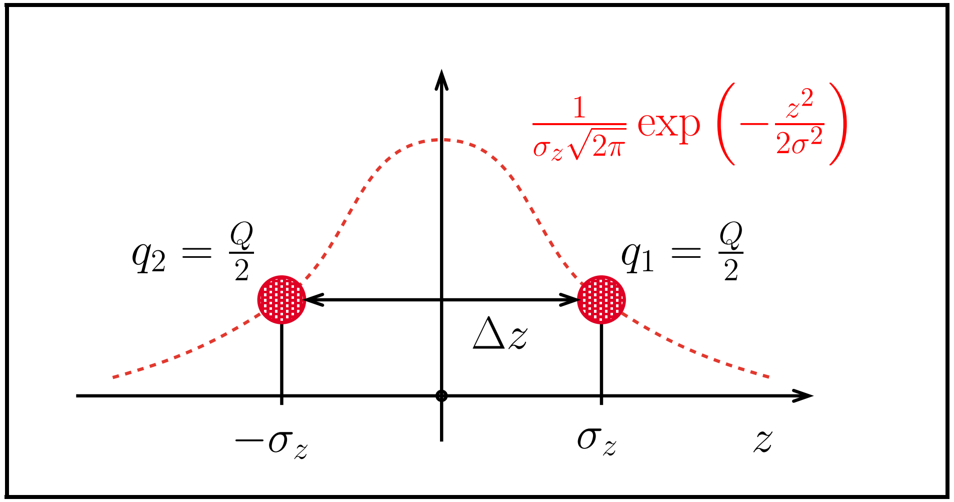
Bunchlänge $[-4\sigma; 4\sigma]$ mit $\sigma = 0.2$ mm

Bewegungsgleichung für ein Elektron bei Berücksichtigung der transversalen Wakefelder eines im Abstand Δz vorausfliegenden Teilchens:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + k_\beta^2 x = \frac{\mathrm{e}\, q_1 W_x' \,\Delta z}{m_0 c^2 \gamma}\, x_1}$$

Dynamik einzelner Ladungspakete

Zweiteilchenmodell ohne Beschleunigung



Ein Ladungspaket mit gaußförmiger Ladungsverteilung und der Gesamtladung Q wird durch 2 Ladungen $Q/2$ im Abstand $2\sigma_z$ simuliert.

Mittlere quadratische Abweichung:

$$\boxed{\sigma_z^2 = \overline{z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \, \mathrm{d}z}$$

Zweiteilchenmodell ohne Beschleunigung

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 1.\ \text{Teilchen} &: \quad x_1'' + k_1^2 x_1 = 0 \\ 2.\ \text{Teilchen} &: \quad x_2'' + k_2^2 x_2 = \frac{\mathrm{e}\, Q W_x' \Delta z}{2\gamma m_0 c^2} x_1 \end{aligned}$$

Beide Makropartikel sollen mit etwas unterschiedlicher Wellenlänge schwingen:

$$k_2 = k_1 + \Delta k \quad , \quad \Delta k \ll k_1$$

Anfangsbedingungen

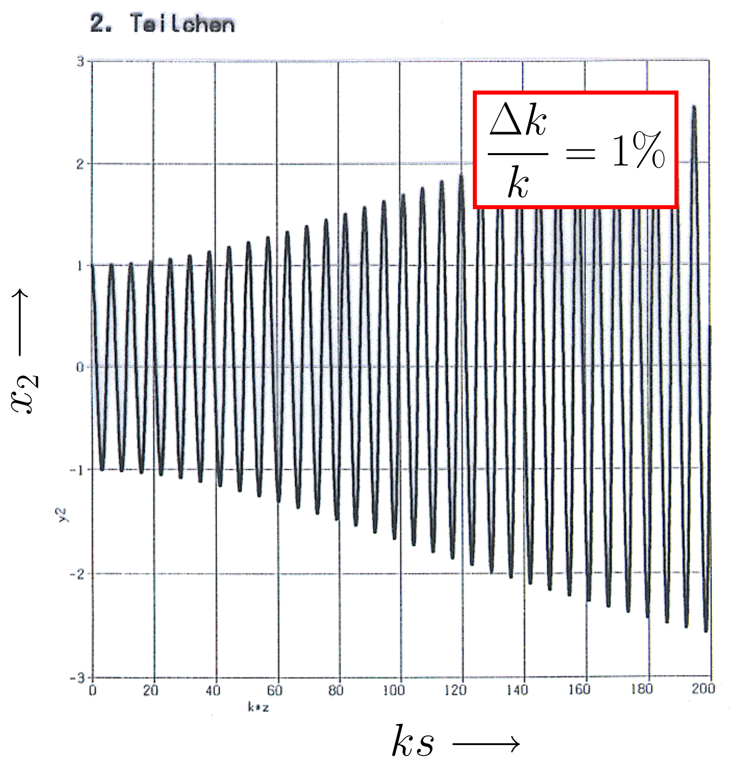
$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = \hat{x} \\ x_1'(0) &= x_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

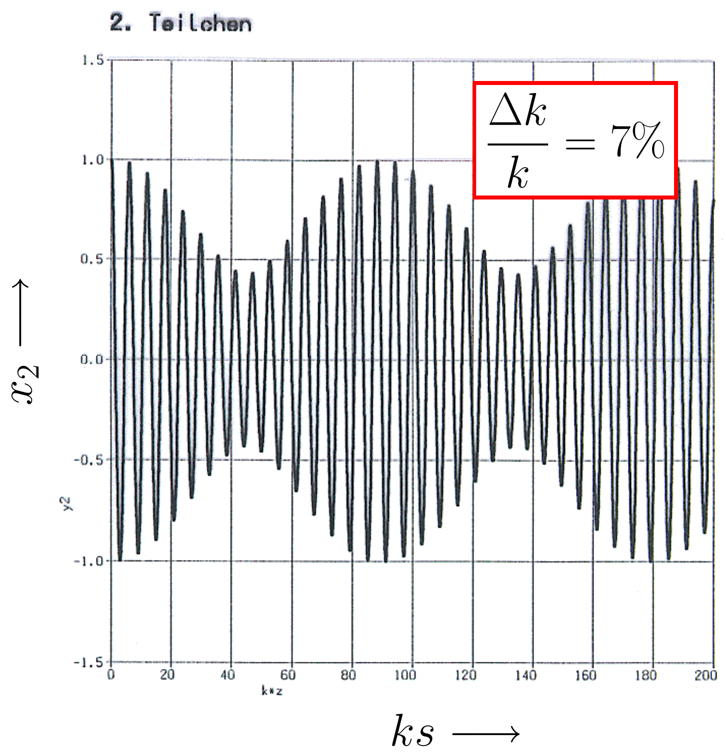
Damit ergeben sich als Lösung der Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\hat{x}} &= \exp\left\{ \mathrm{j} k_1 s \right\} \\ \frac{x_2 - x_1}{\hat{x}} &= \left\{ 1 - \frac{\mathrm{e}\, Q W_x' \Delta z}{4\gamma m_0 c^2 k_1 \Delta k} \right\} 2\mathrm{j}\, \sin\left(\frac{\Delta k}{2} s \right) \exp\left\{ \mathrm{j} \left(k_1 + \frac{\Delta k}{2} \right) s \right\} \end{aligned}$$

Zweiteilchenmodell ohne Beschleunigung

Expemplarischer Verlauf der Bewegungsbahnen des zweiten Teilchens





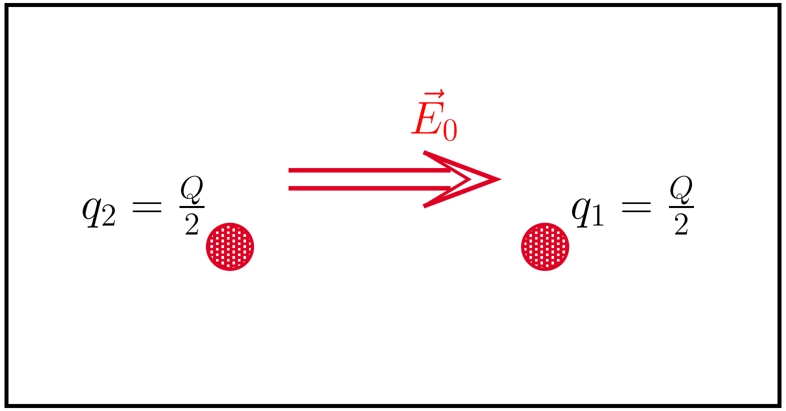
$\Delta k \to 0:$ linear mit s ansteigende Oszillation

$\Delta k \neq 0:$ Schwebung mit der Amplitude:

$$2\left(1 - \frac{\mathrm{e}\, Q W_x' \Delta z}{4\gamma m_0 c^2 k_1 \Delta k}\right)$$

Dynamik einzelner Ladungspakete

Zweiteilchenmodell mit Beschleunigung



Es ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{1. Teilchen} & : & x_1'' + \dfrac{\gamma_1'}{\gamma_1} x_1' + k_1^2 x_1 = 0 \\ \text{2. Teilchen} & : & x_2'' + \dfrac{\gamma_2'}{\gamma_2} x_2' + k_2^2 x_2 = C \dfrac{1}{\gamma_2} x_1 \qquad \text{mit} \quad C = \dfrac{\mathrm{e}\, Q W_x' \Delta z}{2 m_0 c^2} \end{array}}$$

Zweiteilchenmodell mit Beschleunigung

Für beide Makropartikel gilt:

- etwas unterschiedlicher Wellenlänge,
- eine unterschiedliche Anfangsenergie.

$$\gamma_1 = \gamma_i(1 + Gs) \qquad ; \qquad \gamma_2 = \gamma_1(1 - 2\delta)$$

$$k_1^2 = \frac{\gamma_i}{\gamma_1} k_i^2 \qquad ; \qquad k_2^2 = \frac{\gamma_i}{\gamma_2} k_i^2$$

E_i, λ_{β_i}: Energie und Betatronwellenlänge für $s = 0$

$$\gamma_i = E_i / m_0 c^2 \qquad ; \qquad k_i^2 = (2\pi/\lambda_{\beta_i})^2$$

Mit dem Ansatz $\boxed{\zeta = \sqrt{1 + Gs}}$ und der Abkürzung $\boxed{u = \frac{2k_i\zeta}{G} \quad ; \quad \tilde{u} = u(1 + \delta)}$ ergeben sich zwei neue Bewegungsgleichungen:

Zweiteilchenmodell mit Beschleunigung

$$\begin{aligned}
&\text{1. Teilchen} \quad : \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}u} + x_1 = 0 \\
&\text{2. Teilchen} \quad : \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}\tilde{u}^2} + \frac{1}{\tilde{u}}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\tilde{u}} + x_2 = \frac{C}{\gamma_i k_i^2 (1-2\delta)} x_1
\end{aligned}$$

Lösungen der homogenen Differentialgleichungen

- Besselfunktionen $J_0(u)$ und $N_0(u)$

Näherungslösung für *adiabatische Beschleunigung*: $\boxed{k_i/G \gg 1}$

- Viele Betatronschwingungen, bevor sich die Energie verdoppelt hat.
- Asymptotische Näherungen der Besselfunktionen mit folgendem Ansatz:

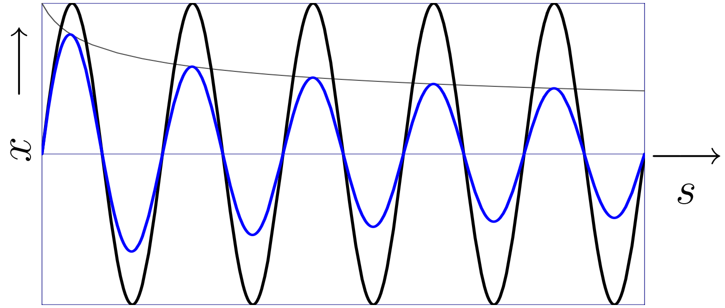
$$\frac{1}{\sqrt{u}} e^{\mathrm{j}u} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}}} e^{\mathrm{j}\tilde{u}} \approx \frac{1}{\sqrt{u}} e^{\mathrm{j}\tilde{u}}$$

Zweiteilchenmodell mit Beschleunigung

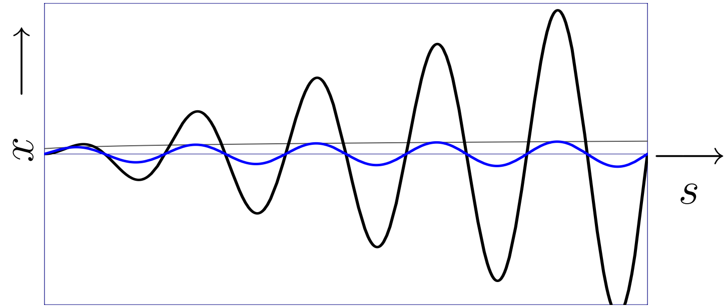
$$\boxed{\left|\frac{x_2 - x_1}{\hat{x}}\right| = \left|\left\{1 - \frac{\mathrm{e}\,Q W_x' \Delta z}{4 m_0 c^2 \gamma_i k_i^2 \delta}\right\} \frac{2}{\sqrt[4]{1+Gs}} \sin\left[\frac{\delta k_i}{G}\left(\sqrt{1+Gs}-1\right)\right]\right|}$$

Für den Grenzfall $\delta \to 0$, d.h. gleiche Anfangsenergien, gilt:

1. Teilchen



2. Teilchen



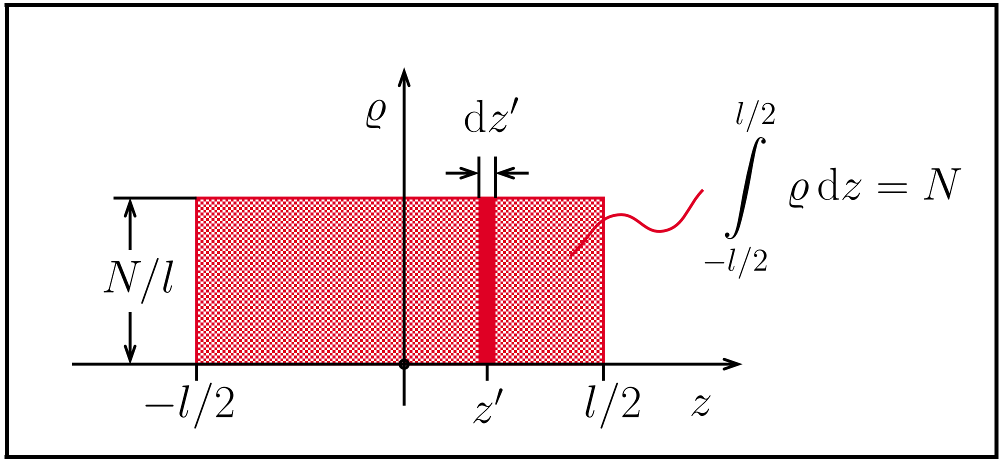
führt im beschleunigten Fall eine *gedämpfte Schwingung* aus.

$$|x_1| \sim \frac{1}{\sqrt[4]{1+Gs}} = \underbrace{\sqrt[4]{\frac{E_i}{E(s)}}}_{\text{adiabatischer Dämpfungsfaktor}}$$

Die Amplitude steigt im beschleunigten Fall mit der 4. Wurzel aus s an, während sie ohne Beschleunigung linear ansteigt.

Dynamik einzelner Ladungspakete

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung



Ein Bunch mit rechteckförmiger Ladungsverteilung und der Gesamtteilchenzahl N

Die *führende Ladung* q_1 geht über in:

$$q_1 \rightarrow \mathrm{e}\, \varrho(z')\, \mathrm{d}z'$$

Es gilt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(z,s)}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{\gamma(s)} \frac{\mathrm{d}\gamma(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x(z,s)}{\mathrm{d}s} + k^2(s) x(z,s)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2}{m_0 \gamma(s) c^2} \int_z^{l/2} \varrho(z') W_x(z'-z) x(z',s)\, \mathrm{d}z'$$

Dynamik einzelner Ladungspakete

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung ohne Beschleunigung

Voraussetzungen:

- keine Beschleunigung: $\gamma(s) = \gamma_0$, $k(s) = k_0$
- lineares Wakefeld: $W_x(z' - z) = W_0 \frac{z'-z}{l}$

Lösung durch "sukzessive Approximation": $x(z,s) = \sum_n x_n(z,s)$

$$
\begin{array}{lcl}
0.\ \text{Näherung} & : & W_x x = 0 \longrightarrow x_0 \\
1.\ \text{Näherung} & : & W_x x = W_x x_0 \longrightarrow x_1 \\
2.\ \text{Näherung} & : & W_x x = W_x x_1 \longrightarrow x_2 \\
 & : & \text{u.s.w.}
\end{array}
$$

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x_n(z,s)}{\mathrm{d}s^2} + k^2(s) x_n(z,s) = \frac{\mathrm{e}^2}{m_0 \gamma_0 c^2} \int_z^{l/2} \varrho(z') W_x(z'-z) x_{n-1}(z',s)\,\mathrm{d}z' \qquad \text{mit} \qquad x_0(z,s) = \hat{x} \cos k_0 s}
$$

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung ohne Beschleunigung

Bestimmung der Greenschen Funktion der inhomogenen Differentialgleichung:

Allgemeines Anfangswertproblem:

$$\mathcal{D}\{u(s)\} = f(s)$$
$$u(0) = u'(0) = 0$$

$\mathcal{D}$: Differentialoperator

Lösung:

$$u(s) = \int_0^s \underbrace{G(s,s')}_{\text{Greensche Funktion}} f(s')\,\mathrm{d}s'$$

mit $G(s, s' \geq s) \stackrel{!}{=} 0$

und $\boxed{\mathcal{D}\{G(s,s')\} = \delta(s,s')}$

Angewendet auf das vorliegende Problem:

$$\mathcal{D} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} + k_0^2 \quad \longrightarrow \quad G(s,s') = A(s') \sin\left[k_0(s - s')\right]$$

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung ohne Beschleunigung

Bestimmung der Funktion $A(s')$

- Untersuchung der Greenschen Funktion für $s \to s'$.
- Integration der Differentialgleichung der Greenschen Funktion in einer kleinen ϵ-Umgebung um s'

$$\underbrace{\int_{s'-\epsilon}^{s'+\epsilon} \left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} + k_0^2 \right\} G(s,s')\,\mathrm{d}s}_{} = \underbrace{\int_{s'-\epsilon}^{s'+\epsilon} \delta(s-s')\,\mathrm{d}s}_{=1}$$

$$\downarrow \epsilon \to 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s'+0} - \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s'-0}}_{=0}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s'+0} \overset{!}{=} 1 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{G(s,s') = \frac{1}{k_0} \sin\left[k_0(s-s')\right]}$$

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung ohne Beschleunigung

Damit lautet die *allgemeine Lösung*:

$$\boxed{\begin{aligned} x(z,s) &= \sum_n x_n(z,s) \\ x_0(z,s) &= \hat{x}\cos k_0 s \\ x_n(z,s) &= \int\limits_0^s \frac{\sin[k_0(s-s')]}{k_0}\left\{\frac{\mathrm{e}^2}{m_0\gamma_0 c^2}\int\limits_z^{l/2}\varrho(z')W_x(z'-z)x_{n-1}(z',s')\,\mathrm{d}z'\right\}\mathrm{d}s' \end{aligned}}$$

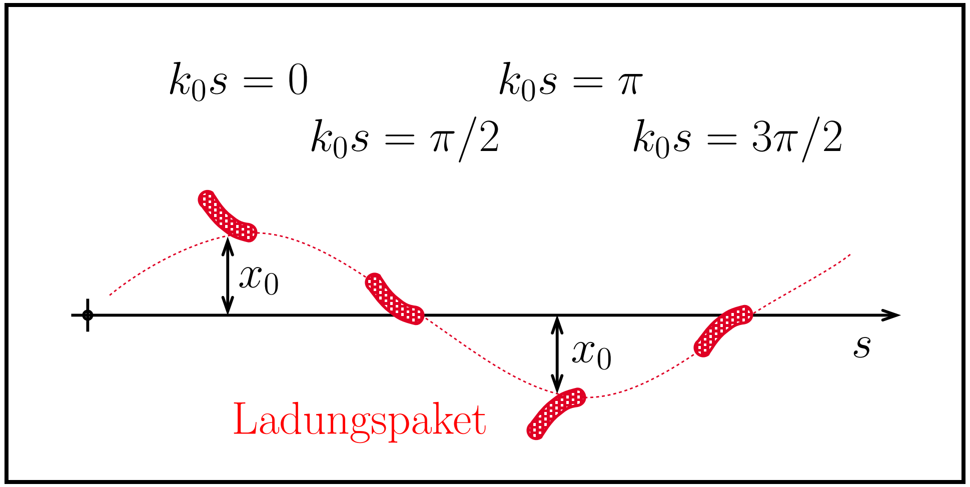
Am Ende des Linearbescheunigers $s = L$ ergibt sich unter der Voraussetzung $k_0 L \gg 1$, d.h. viele Betatronschwingungen:

$$\boxed{\begin{aligned} x(z,L) &= \hat{x}e^{\mathrm{j}k_0 L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(2n)!}\left(\frac{\eta}{2\mathrm{j}}\right)^n \\ \text{mit}\qquad \eta &= \frac{\mathrm{e}^2}{m_0 c^2}\frac{LNW_0}{\gamma_0 k_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{l}\right)^2 \end{aligned}}$$

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung ohne Beschleunigung

Bei starken Wakefeldern, d.h. $|\eta| \gg 1$, kann man die folgende Nähereung verwenden:

$$\boxed{x(z,L) \approx \hat{x}\frac{|\eta|^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{6\pi}} \exp\left\{\frac{3\sqrt{3}}{4}|\eta|^{\frac{1}{3}}\right\}}$$



Um die Strahlachse schwingendes Ladungspaket

Dynamik einzelner Ladungspakete

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung

Die Rechnung für den beschleunigten Fall ist analog zum unbeschleunigten Fall:
Die Greensche Funktion wird diesmal aus Besselfunktionen konstruiert, die wegen der *adiabatischen Beschleunigung* durch ihre asymptotischen Näherungen ersetzt werden dürfen (wie beim Zweiteilchenmodell).

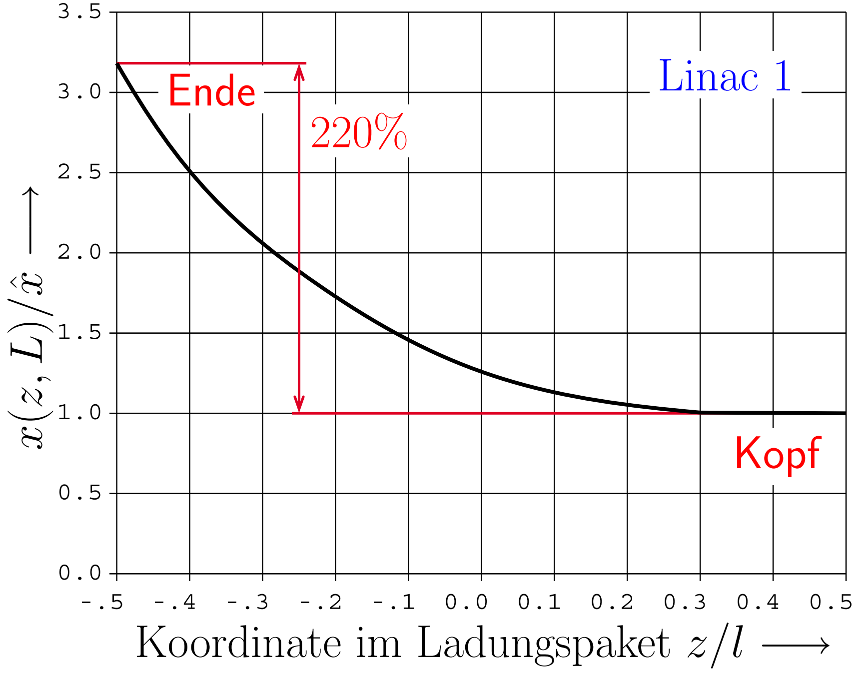
$$\boxed{\begin{aligned} x(z,L) &= \hat{x}\,\sqrt{\frac{E_i}{E_f}}\;e^{\mathrm{j}k_0 L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(2n)!}\left(\frac{\tilde{\eta}}{2\mathrm{j}}\right)^n \\ \text{mit}\qquad \tilde{\eta} &= \frac{1}{GL}\ln\frac{E_f}{E_i}\,\frac{\mathrm{e}^2}{m_c^2}\frac{LNW_0}{\gamma_0 k_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{l}\right)^2 \end{aligned}}$$

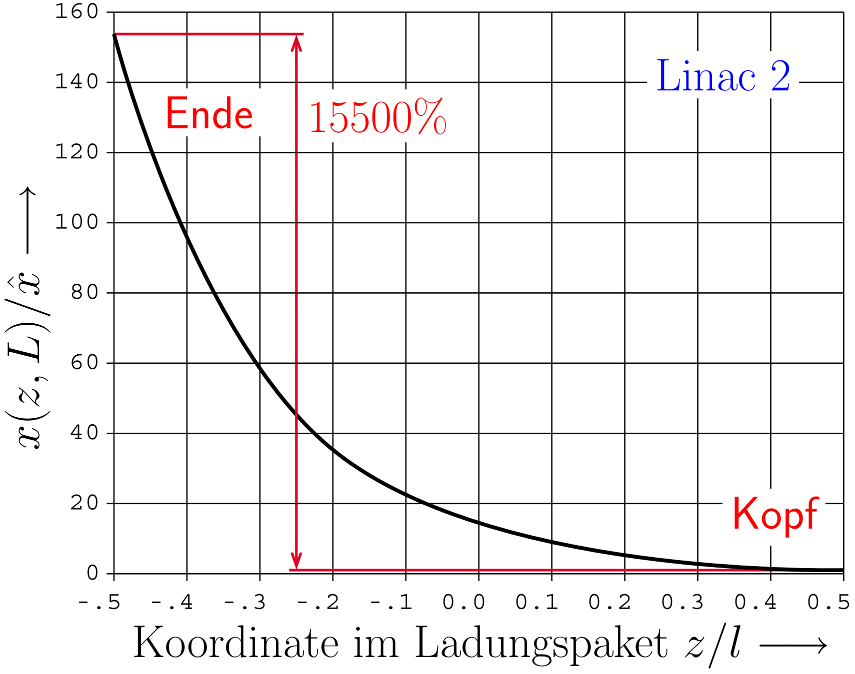
Folgerungen:

- Der *Strahlabbruch* wird durch den Parameter η beschrieben
- η hängt vom Ort innerhalb des Ladungspakets ab $\eta_{\mathrm{Ende}} > \eta_{\mathrm{Kopf}} = 0$
- η steigt linear mit der Paketlänge
- ohne Beschleunigung steigt η linear mit s,
  mit Beschleunigung nur logarithmisch

Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung

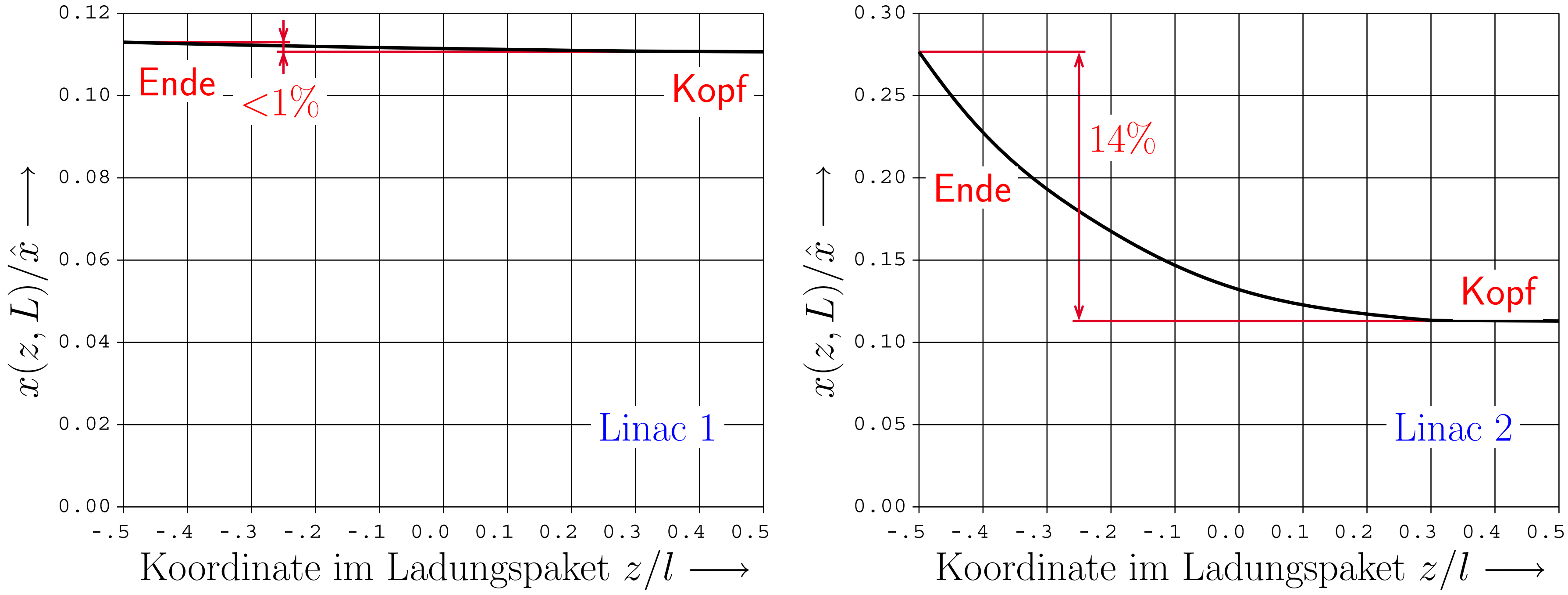
ohne Beschleunigung



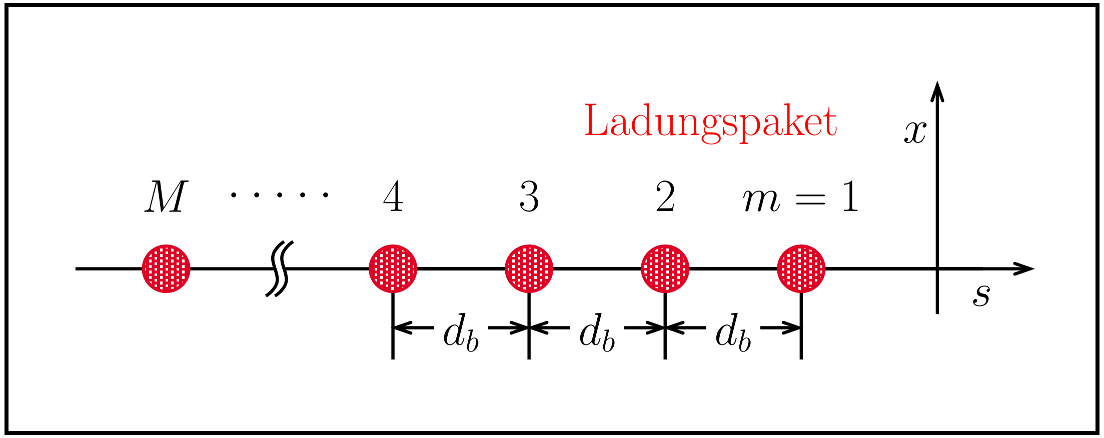


Ladungspaket mit rechteckförmiger Ladungsverteilung

mit Beschleunigung



Dynamik mehrerer Ladungspakete



- Die Ladungspakete werden durch M Makropartikel der Ladung $Q = \mathrm{e}N$ repräsentiert.
- Sie folgen im Abstand $s = d_b$ einander.
- Es müssen die nicht linearen Wakefelder berücksichtigt werden.

Dynamik mehrerer Ladungspakete

Bewegungsgleichung für eine Kette von beliebig vielen Ladungspaketen mit Beschleunigung

Bewegungsgleichung für das m-te Ladungspaket:

$$\boxed{x_m''(s) + \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} x_m'(s) + k^2(s) x_m(s) = \frac{N\mathrm{e}^2}{\gamma(s) m_0 c^2} \sum_{n=1}^{m-1} W_\perp([m-n]d_b) x_n}$$

Lösungsansatz:

- Lösung der homogenen Bewegungsgleichung

$$\boxed{x''(s) + \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} x'(s) + k^2(s) x(s) = 0}$$

- Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung durch Überlagerung der homogenen und partikulären Lösung

Bewegungsgleichung für eine Kette von beliebig vielen Ladungspaketen

Mit der Transformation $\boxed{x(s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} w(s)}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\begin{gathered} w'' + P(s) w = 0 \\ \text{mit} \quad P(s) = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2} \approx k(s) \end{gathered}}$$

Differentialgleichung in der Form einer eindimensionalen Schrödingergleichung

Bewegungsgleichung für eine Kette von beliebig vielen Ladungspaketen

Für die Bewegungsgleichung in der Form einer eindimensionalen Schrödingergleichung

$$\boxed{\begin{gathered} w'' + k(s)w = 0 \\ \text{mit} \quad x(s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(s)}} w(s) \end{gathered}}$$

ergibt sich die WKB-Lösung (nach Wentzel, Kramers und Brillouin)

$$w(s) \approx \sqrt{\frac{k_0}{k(s)}} \exp\left\{ \pm \mathrm{j} \int\limits_0^s k(s')\,\mathrm{d}s' \right\}$$

und somit die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung

$$\boxed{x^{\pm}(s) \approx x(0) \sqrt{\frac{\gamma_0 k_0}{\gamma(s) k(s)}} \exp\left\{ \pm \mathrm{j} \int\limits_0^s k(s')\,\mathrm{d}s' \right\}}$$

Bewegungsgleichung für eine Kette von beliebig vielen Ladungspaketen

Übergang zur inhomogenen Bewegungsgleichung für das m-te Ladungspaket

$$\boxed{\begin{gathered}\gamma(s)x''_m(s) + \gamma'(s)x'_m(s) + \gamma(s)k^2(s)x_m(s) = F_m(s) \\ \text{mit} \qquad F_m(s) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{N\mathrm{e}^2}{m_0c^2} W_\perp([m-n]d_b)x_n\end{gathered}}$$

Lösungsansatz für $x_m(s)$

$$x_m(s) \;=\; x_m(0)\sqrt{\frac{\gamma_0 k_0}{\gamma(s)k(s)}}\exp\left\{\mathrm{j}\int_0^s k(s')\,\mathrm{d}s'\right\} + \int_0^s \underbrace{G(s,s')}_{\text{Greensche Funktion}} F_m(s')\,\mathrm{d}s'$$

Homogener Anteil aus der WKB-Lösung:

- alle Ladungspakete haben den gleichen Anfangsoffset $x(0)$.

Partikulärer Anteil aus der Greenschen Funktion:

- homogene Anfangsbedingungen $x_{\text{partikulär}}(0) = x'_{\text{partikulär}}(0) = 0$,

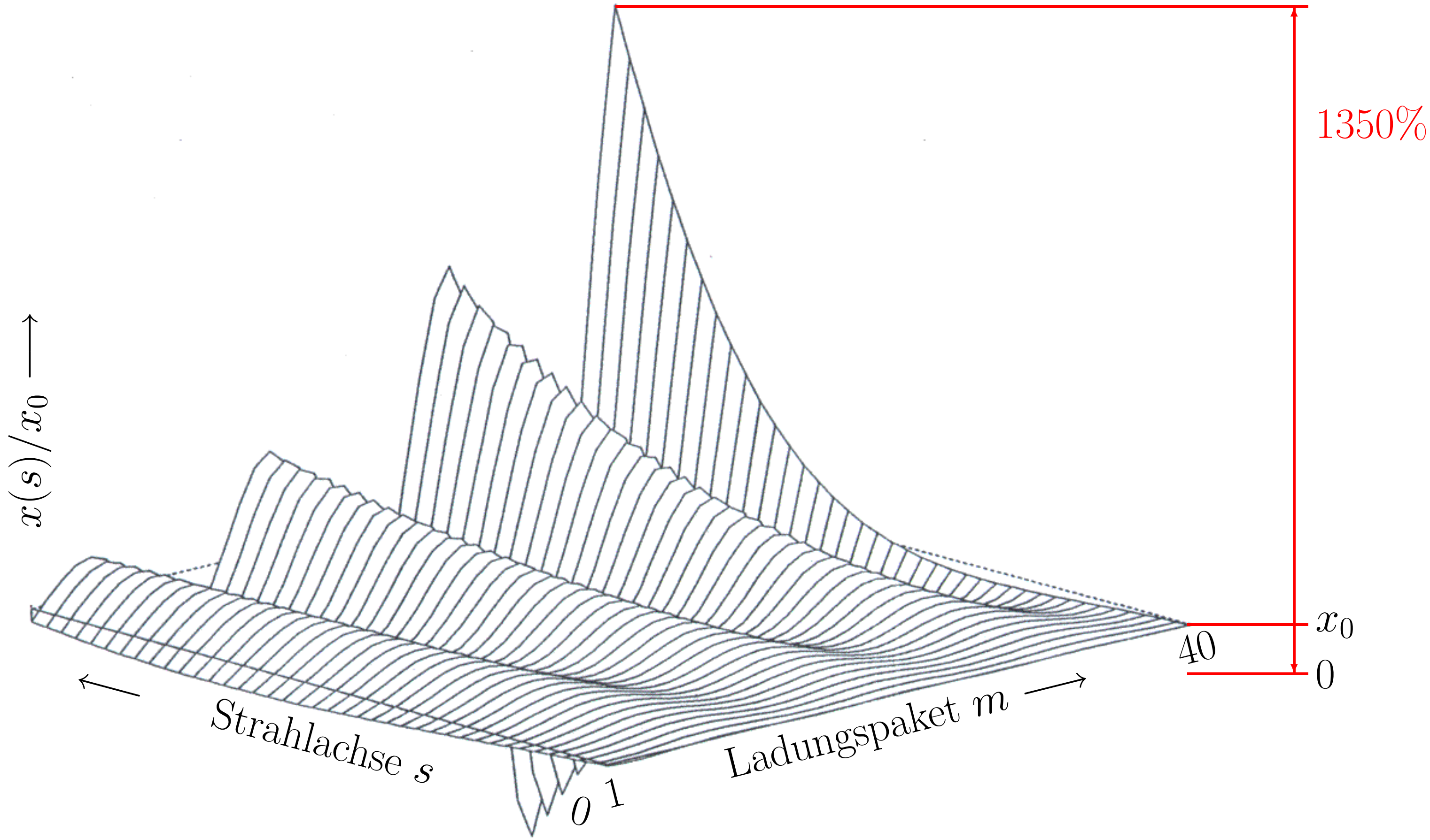
Bewegungsgleichung für eine Kette von beliebig vielen Ladungspaketen

Damit lautet die *WKB-Lösung* der inhomogenen Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} x_m(s) &= x_m(0)\sqrt{\frac{\gamma_0 k_0}{\gamma(s)k(s)}}\exp\left\{\mathrm{j}\int_0^s k(s')\,\mathrm{d}s'\right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\gamma(s)k(s)}}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{\gamma(s')k(s')}}\sin\int_{s'}^s k(s'')\,\mathrm{d}s'' \;\; F_m(s')\,\mathrm{d}s' \\ \text{mit} &\qquad F_m(s) = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{N\mathrm{e}^2}{m_0c^2}W_\perp([m-n]d_b)x_n \end{aligned}}$$

Dynamik mehrerer Ladungspakete

Bewegungsgleichung für eine Kette von beliebig vielen Ladungspaketen
mit Beschleunigung



Zusammenfassung und Ausblick

- Das Einteilchenmodell beschreibt das grundlegende Bewegungsverhalten
- Das Zweiteilchenmodell ermöglicht eine Abschätzung für das gesamte Ladungspaket
- Es lassen sich auch komplexe Modelle für das gesamte Ladungspaket angeben
- Bei dem Modell für mehrere Ladungspakete werden die nicht-linearen Wakefelder berücksichtigt

- Das Dargestellte ist Grundlage von Simulationsprogrammen
  - um komplette Beschleuniger zu konzeptionieren
  - zur Untersuchung des Einflusses von Positionierungsfehlern
- Besondere Bedeutung für neuartige Strukturen

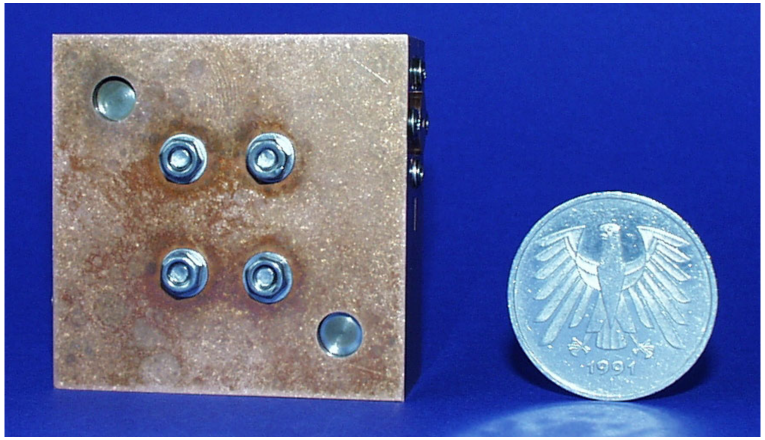


Foto: Rolf Merte, TU-Berlin